МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский государственный социально-педагогический университет»

Кафедра физики, математики и методики обучения

Утверждаю
Проректор по учебно-методической
работе и качеству образования
______________ Н.Н. Кислова

Кечина Ольга Михайловна

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
для проведения промежуточной аттестации по дисциплине
«Математический анализ»

Направление подготовки:
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность (профиль):
«Математика» и «Физика»

Квалификация (степень) выпускника
Бакалавр

Рассмотрено
Протокол №3 от 25.10.2022 г.
Заседания кафедры физики, математики
и методики обучения

Одобрено
Начальник Управления
образовательных программ
Н.А. Доманина

Самара 2022

Пояснительная записка

Фонд оценочных средств (далее – ФОС) для промежуточной аттестации по дисциплине «Математический анализ» разработан в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки). Утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 22 февраля 2018 г. № 125 основной профессиональной образовательной программой высшего образования 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили «Математика» и «Физика» с учетом требований профессионального стандарта «Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)», утвержденный приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18 октября 2013 г. № 544н (зарегистрирован Министерством юстиции Российской Федерации 6 декабря 2013 г., регистрационный № 30550), с изменениями, внесенными приказами Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 25 декабря 2014 г. № 1115н (зарегистрирован Министерством юстиции Российской Федерации 19 февраля 2015 г., регистрационный № 36091) и от 5 августа 2016 г. № 422н (зарегистрирован Министерством юстиции Российской Федерации 23 августа 2016 г., регистрационный № 43326).

Цель ФОС для промежуточной аттестации – установление уровня сформированности части компетенции УК-1.

Задачи ФОС для промежуточной аттестации – контроль качества и уровня достижения результатов обучения по формируемым в соответствии с учебным планом компетенциям:

УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.

УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи

Знает: этапы решения задачи из различных разделов математического анализа (теории пределов функций, дифференциального исчисления, интегрального исчисления функций одной и многих переменных, рядов).

Умеет: определять порядок действий при решении задачи исходя из её анализа

УК-1.2. Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи.

Умеет: работать с теоретическим материалом по теме задачи; пользоваться математической символикой и терминологией при решении задач и доказательстве теорем математического анализа

УК-1.3. Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и риски.

Выбирает целесообразный метод решения задач математического анализа

Требование к процедуре оценки:

Помещение: особых требований нет

Оборудование: особы требований нет/ Инструменты: в рамках дисциплины используется балльно-рейтинговая система оценивания индивидуальных результатов обучения, согласно которой разработанные задания имеют критерии оценки в баллах.

Расходные материалы: особых требований нет

Доступ к дополнительным справочным материалам: особых требований нет

Нормы времени: на подготовку к ответу отводится 40 минут, на ответ –20 минут.

Комплект оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Проверяемая компетенция:

УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

Проверяемый индикатор достижения компетенции:

УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи

УК-1.2. Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи

УК-1.3. Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и риски.

Проверяемые результаты обучения:

Знает: этапы решения задачи из различных разделов математического анализа (теории пределов функций, дифференциального исчисления, интегрального исчисления функций одной и многих переменных, рядов).

Умеет: определять порядок действий при решении задачи исходя из её анализа.

Умеет: работать с теоретическим материалом по теме задачи; пользоваться математической символикой и терминологией при решении задач и доказательстве теорем математического анализа.

Выбирает целесообразный метод решения задач математического анализа

Тип (форма) задания: задачи.

Пример типовых заданий (оценочные материалы):

Модуль «Введение в анализ»

Задачи по теме «Пределы функций»:

Вычислить пределы функций, указывая используемые теоремы о пределах:

1) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+5x^2+6x+1)$;

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}(3x^3-5x^2+4)$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+1}{x^2-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x}$;
5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$;
6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+1}$;
7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}3x}{\sin 2x}$;
8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-5^{-x}}{x}$;
9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x-4}\right)^{3x}$;
10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{3x}\right)^{x}$.
11) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4x+8)$;
12) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-x^2+1)$;
13) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$;
14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$;
15) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}$;
16) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}$;
17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{2x}$;
18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x\sin 5x}$;
19) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-5}{3x+5}\right)^{4x}$;
20) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{2x-1}$.
21) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-2x+5)$;
22) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x+1)$;
23) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$;
24) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2+5x+1}$;
25) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$;
26) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;
27) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x+\sin x}{x\cdot\mathrm{tg}x}$;
28) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 3x)}{3x}$;
29) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{3x+1}\right)^{5x}$;
30) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x-9}{x+7}\right)^{1-x}$.

Задачи по теме «Непрерывность функции. Точки разрыва».

Исследовать функции на непрерывность и построить график в окрестности каждой точки разрыва, предварительно определив её тип:

1) $y=\frac{x^2-4x+3}{x^2-x-2}$;
2) $y=\frac{x^2-16}{x-4}$;
3) $y=\begin{cases}\cos x, -\frac{\pi}{2}\le x<0,\\ x^2+1, x\ge 0.\end{cases}$
4) $y=arctg\,\frac{2x}{x-2}$.
5) $y=arctg\,\frac{1-x}{x-4}$;
6) $y=\frac{\sin x}{x}$;
7) $y=\frac{x-3}{(x-4)^2}$;
8) $y=\begin{cases}\frac{1}{x}, x\le -1;\\ x+1, x>-1.\end{cases}$.
9) $y=\begin{cases}x+1, x<-2;\\ 1, x=-2;\\ x^2-5, x>-2.\end{cases}$
10) $y=\frac{x^3-8}{x-2}$;

11) $y = \frac{1}{5^{\frac{1}{x-3}}+2}$;
12) $y = \frac{x-1}{x^2-x-12}$.
13) $y = arcctg\frac{3+2x}{x-4}$;
14) $y = \frac{x^2+4}{x-2}$;
15) $y = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, x < 1; \\ 2x, x \geq 1. \end{cases}$
16) $y = \frac{(x+1)^2}{x^2-3x-4}$.
17) $y = \frac{1}{x^2-10x+16}$;
18) $y = \begin{cases} x^3, x \leq -1; \\ x^2+1, x > -1. \end{cases}$
19) $y = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$;
20) $y = \frac{-4}{(x-4)^2}$.
21) $y = \frac{x}{x^2+4}$;
22) $y = \begin{cases} \cos x, -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ x^2+1, x \geq 0. \end{cases}$
23) $y = 4^{\frac{2}{x^2-1}}$;
24) $y = \frac{x-4}{x^2-16}$.
25) $y = \frac{x}{(x+1)^2}$;
26) $y = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}$;
27) $y = \begin{cases} e^x, x \leq 0, \\ 2x-1, x > 0. \end{cases}$
28) $y = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$;
29) $y = e^{x+\frac{1}{x}}$;
30) $y = \begin{cases} x^2+1, x < 0, \\ 1-x, 0 \leq x \leq 2, \\ 2, x > 2. \end{cases}$

Модуль «Дифференциальное исчисление»

Задачи

Найти производные функций:

1) $y = 3x^4 - 5x + 1$;
2) $y = \cos^3 4x$;
3) $y = \frac{x-1}{x+1}$;
4) $y = 10^{2-x}$;
5) $y = 4 - arctgx^2$;
6) $y = \frac{2}{\ln x}$;
7)$y = 3x^2(x^3 + e^x)$;
8)$y = \arccos(\sin x)$;
9) $y = \frac{x}{x^2+1}$;
10) $y = \frac{\cos x}{2-3\sin x}$;
11) $y = \ln^2 x$;
12) $y = \frac{arctgx}{x}$;
13) $y = x \arcsin x$;
14) $y = ctg\frac{x+1}{2}$;
15) $y = \sqrt{1+2tgx}$;
16) $\sin(2x+y) - 8xy = 0$;
17) $y = (1+2x)^{30}$;
18) $y = (\sin x)^{\cos x}$.
19)$y = 4x^3 + 3x^2 - 5$;
20) $y = \ln^2 5x$;
21) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$;
22) $y = tg\frac{x-2}{3}$;
23)$y = 2\cos 3x - 5\sin x$;
24) $y = \frac{x}{\ln x}$;
25)$y = (3x^4 - 2x) \cdot e^x$;

26) $y = arctg(\sin x)$;
27) $y = \frac{x^2-4}{x^3+2x}$;
28) $y = \frac{3\cos x + x}{\sin x}$;
29) $y = \cos^2 x$;
30) $y = \frac{\arcsin x}{x^2}$;
31) $x^2 y + arctg\frac{y}{x} = 0$;
32) $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$;
33) $\cos(xy) + y^3 = 0$;
34) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t^2 \end{cases}$.

Вычислить пределы функций, используя правила Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+3x^3-2x^2+10x-12}{4x^4-5x^3-3x^2+7x-3}$
2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$
3) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3-8x^2+17x-10}{x^4-5x^3-2x^2+11x-5}$
4) $\lim\limits_{x\to \pm 2}\frac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$
5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$
6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$
7) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x+1}{3x^2+x-1}$
8) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\frac{x^3}{e^x+x^2}$
9) $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{ctgx}{\ln x}$
10) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{x+\ln x}$
11) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot e^{-x}$
12) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}$

Индивидуальное задание. Провести полное исследование и построить графики заданных функций.

Вариант	Функции		
	A	B	C
1.	$y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 12$	$y = 1 - \frac{x}{(x-1)^2}$	$y = 2arctgx - x$
2.	$y = \frac{1}{6}x^3(x^2-5)$	$y = 2 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$	$y = xe^{-\frac{x}{4}}$
3.	$y = x^3 - 4x^2 - 3x + 6$	$y = 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$	$y = \ln(x^2 - 4x)$
4.	$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$	$y = \frac{2x^2+2}{x+1}$	$y = x^3 e^{-\frac{4}{3}x}$
5.	$y = \frac{6x^2 - x^4}{9}$	$y = x^2 + \frac{4}{x}$	$y = 2x - arctg2x$
6.	$y = 4x^3 + 15x^2 + 12x + 1$	$y = \frac{x}{(x+2)^2}$	$y = x^3 e^{-x}$
7.	$y = x^4 - 2x^3 + 3$	$y = \frac{x^2-2}{3x^2-1}$	$y = \ln(x^2 + 2x)$
8.	$y = 3x^3 - x + 2$	$y = \frac{2x^2-1}{x^2-3}$	$y = xe^{-x}$
9.	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$	$y = \frac{x^2-3}{4x^2-1}$	$y = 2 - arctgx^2$
10.	$y = \frac{(x-2)^2(x+4)}{4}$	$y = \frac{3-x^2}{x+2}$	$y = \ln(x^2 - 4)$
11.	$y = \frac{1}{9}x^5 - 45x + 1$	$y = \frac{4x+2}{(x-1)^2}$	$y = xe^{-\frac{x}{2}}$
12.	$y = 3x^5 - 5x^3$	$y = x + \frac{1}{x^2}$	$y = 1 + x - arctg2x$
13.	$y = (x+4)^2(x-5)$	$y = 2x - \frac{1}{x^2}$	$y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x}$
14.	$y = x^2(x-3)$	$y = x + \frac{2x}{x^2-1}$	$y = \ln(x^2 + 4)$

15.	$y=\frac{(x^2-5)^3}{125}$	$y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$	$y=e^{2x}-2x+2$
16.	$y=x^6-3x^4+3x^2-5$	$y=\frac{5x^2-2}{3x^2-1}$	$y=e^{2x-x^2}$
17.	$y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+2$	$y=\frac{6x^2-1}{x^2-9}$	$y=4-arctgx^2$
18.	$y=x^4-8x^2-9$	$y=2x-\frac{1}{x^2}$	$y=x^2e^{\frac{x}{2}}$
19.	$y=-x^3+3x+3$	$y=\frac{2x^2}{x+1}$	$y=arctgx^2+5$
20.	$y=-\frac{1}{3}x^3+3x^2+40x$	$y=\frac{(4-x)^2}{2-x}$	$y=ln(3x^2+6)$

Модуль «Интегральное исчисление»
Задачи по разделу «Неопределённый интеграл»
Найти интегралы:
1. $\int x\,ln(x^2+2)\,dx$;
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+x}$;
3. $\int x\,cos\,5\,x^2dx$;
4. $\int \frac{(3x-5)dx}{\sqrt{9x2\quad+7x+1}}$;
5. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^2}$;
6. $\int \frac{sin^3 x dx}{cos^4 x}$;
7. $\int \frac{x^2dx}{(3x^3+1)^2}$;
8. $\int x\,ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$;
9. $\int x\sqrt[4]{4-3x^2}dx$;
10. $\int sin^4 x\,dx$;
11. $\int \frac{\arcsin^3 3xdx}{\sqrt{1-9x^2}}$;
12. $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^3}$;
13. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{2x^2+8-x}}dx$;
14. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{3x-5}dx$;
15. $\int \frac{5x-2}{\sqrt{4x^2-4x+3}}dx$;
16. $\int (2x+1)e^{4x}dx$;
17. $\int \frac{dx}{5x+\sqrt[3]{x^2}}$;
18. $\int \frac{cos^2 x}{sin^4 x}dx$;
19. $\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$;
20. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$;
21. $\int sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$;
22. $\int 3x\,ln\frac{x}{2}dx$;
23. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+x}$;
24. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$;
25. $\int cos^4 3\,xdx$;
26. $\int \frac{(3x-5)dx}{10+3x-x^2}$;
27. $\int \frac{dx}{9x^2-4}$;
28. $\int \frac{(1+2x)dx}{x^2(x^2+4)}$.
29. $\int cos^5 x\,sin^2 x\,dx$;
30. $\int arctg\sqrt{2x-1}dx$.

Задачи по разделу «Определённый и несобственные интегралы»

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=(x-2)^3$, $y=4x-8$. Сделать рисунок.
2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной кривыми $y=-x^2+5x-6$, $y=0$. Сделать рисунок.
3. Найти координаты центра тяжести линии $x^2+y^2=4$ в первой четверти. Сделать рисунок.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho=4\cos\varphi$. Сделать рисунок.

5. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением линии $\begin{cases} x = 7(t - \sin t), \\ y = 7(1 - \cos t) \end{cases}$ вокруг оси абсцисс. Сделать рисунок.

6. Вычислить статический момент фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$, $x = 4$, $y = 0$, относительно оси абсцисс. Сделать рисунок.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 2\cos t\,, \\ y = 3\sin t; \end{cases}$ $x = 1$ $(x \le 1)$. Сделать рисунок.

8. Вычислить длину дуги первой арки $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$ Сделать рисунок.

9. Вычислить статический момент фигуры, ограниченной линиями $y = x + 2,\ y = x^2 - 6x + 8,\ x = 0,\ y = 0,$ относительно оси абсцисс. Сделать рисунок.

10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$. Сделать рисунок.

11. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной кривыми $y = -x^2 + 5x - 6,\ y = 0$. Сделать рисунок.

12. Найти координаты центра тяжести линии $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$. Сделать рисунок.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x + 1)^2$, $y^2 = x + 1$. Сделать рисунок.

14. Вычислить длину дуги $\begin{cases} x = 3\cos^3 t\,, \\ y = 3\sin^3 t; \end{cases}$ $\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{2\pi}{3}$. Сделать рисунок.

15. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2$, $y = x$. Сделать рисунок.

16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$. Сделать рисунок.

17. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси ординат фигуры, ограниченной кривыми $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 1$. Сделать рисунок.

18. Вычислить статический момент линии $x^2 + y^2 = 9$ под осью абсцисс относительно оси абсцисс. Сделать рисунок.

19. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$. Сделать рисунок.

20. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением линии $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$вокруг полярной оси. Сделать рисунок.

21. Вычислить статический момент фигуры, ограниченной линиями $0 \le y \le \sqrt{16 - x^2}$ относительно оси абсцисс. Сделать рисунок.

22. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x - 1)^2$, $y^2 = x - 1$. Сделать рисунок.

23. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной кривыми $y = \cos 2x$ $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$. Сделать рисунок.

24. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = 6 - x^2$, $y = 2$. Сделать рисунок.

25 – 30. Исследовать на сходимость интегралы:

25. $\int_2^{+\infty} \frac{ln\, x}{x} dx$;

26. $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$.

27. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$;

28. $\int_1^2 \frac{dx}{x\, ln\, x}$.

29. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

30. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)}}$.

Модуль «Ряды»

Задачи

1. Исследовать ряд на сходимость:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot tg\frac{2}{3n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{3^n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} 6^n \cdot sin\frac{\pi}{7^n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2+5}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(ln\,n)^{5/2}}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^4}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^{n+1}}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot sin\frac{\pi}{3^n}$

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

16) $\sum_{n=1}^{\infty}8n\cdot sin\frac{1}{n}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot ln^5\,n}$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n-1}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2n}}$

20) $\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot sin\frac{\pi}{5^n}$

2. Определить вид сходимости ряда

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n+3}}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot(n+1)}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot(2n+1)}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n}{n^2+1}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{n^2+1}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{ln(n+1)}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n-1)\cdot(n+3)}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n+3}}$

3. Найти область сходимости степенного ряда

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\cdot x^{2(n-1)}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\cdot 3^{n-1}\cdot x^{n-1}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)^n}{n!}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x\right]^n$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\,x^n$

4. Данную функцию $f(x)$ на заданном промежутке разложить в ряд Фурье. Построить графики $f(x)$ и суммы ряда $F(x)$. Вычислить значения $F(x)$ в указанных точках:

1) $f(x)=2x-1$, $[0,2]$, $x=0;\frac{\pi}{2};1;2;13{,}5;-6{,}4.$

2) $f(x)=2x+3$, $[0,\pi]$, по cos, $x=0;1;\pi;4{,}8;\frac{7\pi}{2};\frac{9\pi}{2}.$

3) $f(x)=3x+5$, $[0,4]$, по sin, $x=0;\frac{1}{2};4;19{,}2;-3{,}8.$

4) $f(x)=|x|+1$, $[-\pi,\pi]$, $x=-\pi;0;1;\pi;4{,}8;\frac{17\pi}{2};-\frac{9\pi}{4}.$

5) $f(x)=2-3x$, $[-2,2]$, $x=-2;0;2;21{,}3;-7{,}8.$

6) $f(x)=x+3$, $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, по cos, $x=0;1;\frac{\pi}{2};\frac{9\pi}{4};-\frac{5\pi}{8}.$

7) $f(x)=x^2$, $[0,2]$, $x=-7{,}5;0;1{,}5;2;10{,}8.$

8) $f(x)=2x$, $[0,\pi]$, по cos, $x=-\frac{3\pi}{4};0;\frac{\pi}{3};\pi;\frac{27\pi}{4}.$

9) $f(x)=|x-1|$, $[-2,2]$, $x=-3{,}6;\ -2;\ 0;\ 2;\ 19{,}3.$

10) $f(x)=5$, $[0,2\pi]$, по sin, $x=-6{,}3\pi;\ 0;\ 1;\ 2\pi;\ 7{,}2\pi.$

11) $f(x)=x-2x^2$, $[0,2]$, по sin, $x=-7{,}7;\ 0;\ 15{,}2;\ 19{,}8.$

12) $f(x)=3-x$, $[0,\pi]$, $x=-5{,}7\pi;\ -\frac{\pi}{2};\ 0;\ \frac{\pi}{4};\ 13{,}2\pi.$

13) $f(x)=2-|x|$, $[-3,3]$, $x=-4{,}6;\ -3;\ 0;\ 1{,}5;\ 3;\ 16{,}4.$

14) $f(x)=4$, $[0,\frac{\pi}{4}]$, по sin, $x=-\frac{3}{8}\pi;\ 0;\ \frac{\pi}{8};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{17\pi}{8}.$

15) $f(x)=2x+1$, $[0,4\pi]$, $x=-9{,}2\pi;\ 0;\ 1;\ 4\pi;\ 17{,}3\pi.$

16) $f(x)=|x-2|$, $[0,3]$, по sin, $x=-7{,}3;\ 0;\ 1{,}6;\ 3;\ 9{,}3.$

17) $f(x)=5$, $[0,\frac{\pi}{3}]$, по sin, $x=-\frac{5\pi}{3};\ \frac{\pi}{2};\ 0;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}.$

18) $f(x)=1-2x^2$, $[-1,1]$, $x=-12{,}2;\ -1;\ 0{,}6;\ 1;\ 7{,}4.$

19) $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1,\\ 3-x, & 1\le x<2,\end{cases}$ $x=-3{,}9;\ -2{,}1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 13{,}3.$

20) $f(x)=2x-5$, $[0,1]$, по cos, $x=-2{,}8;\ 0;\ 0{,}7;\ 1;\ 14{,}2.$

Модуль «Функции многих переменных»

Задачи

1. Найти u_x, u_y, если $u=ln(\eta\sqrt{\xi+1})$, где $\xi=y^2-2x, \eta=xy$.
2. Найти u_x, u_y, если $u=arcsin\frac{2\xi}{\eta+3}$, где $\xi=y^3+x, \eta=2x+y$.
3. Найти u_x, u_y, если $u=arctg(e^{\xi}+ln\,\eta)$, где $\xi=xy, \eta=x-y$.
4. Найти u_x, u_y, если $u=5^{\xi^2+\eta}$, где $\xi=ln(x+1), \eta=x+sin\,y$.
5. Найти u_x, u_y, если $u=e^{\xi\cdot\eta}$, где $\xi=2\,ln\,x-y, \eta=y^2-x^2$.
6. Показать, что $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u-x^2-y^2$, если $u=x\cdot\varphi(\frac{y}{x})-x^2-y^2$, где φ - произвольная дифференцируемая функция.
7. Показать, что $\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{xy}$, если $z=x\cdot\varphi(\frac{y}{x+1})$, где φ - произвольная дифференцируемая функция.

8. Показать, что $\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{xy}$, если $z=\sqrt{xy}\cdot\varphi(\frac{y}{x})$, где φ - произвольная дифференцируемая функция.

9. Показать, что $y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{y}{x}\cdot z=0$, если $z=\frac{1}{x}\cdot\varphi(x^2-y^2)$, где φ - произвольная дифференцируемая функция.

10. Показать, что $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=xy+u$, если $u=xy+x\cdot\varphi(\frac{y}{x})$, где φ - произвольная дифференцируемая функция.

11. Проверить: удовлетворяет ли уравнению $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ функция $u=\frac{y}{x}$?

12. Проверить: удовлетворяет ли уравнению $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3(x^3-y^3)$ функция $u=\ln\frac{x}{y}+x^3-y$?

13. Проверить: удовлетворяет ли уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ функция $u=\ln(x^2+(y+1)^2)$?

14. Проверить: удовлетворяет ли уравнению $y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\frac{\partial}{\partial x}=0$ функция $u=x^y$?

15. Проверить: удовлетворяет ли уравнению $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ функция $u=e^{xy}$?

16. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $2x^3y-5y^2+6x=6$ определяет неявную функцию $y=\varphi(x)$ по крайней мере в окрестности точки $(1{,}0)$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

17. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $12xy^4-4x^2y=8$ определяет неявную функцию $y=\varphi(x)$ по крайней мере в окрестности точки $(2{,}1)$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

18. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $3y^2x-2x^3y^4+2x=3$ определяет неявную функцию $y=\varphi(x)$ по крайней мере в окрестности точки $(1{,}1)$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

19. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $4x^2+3y^2+xy=6$ определяет неявную функцию $y=\varphi(x)$ по крайней мере в окрестности точки $(1,-1)$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

20. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $x^3+6xy-y^3=-8$ определяет неявную функцию $y=\varphi(x)$ по крайней мере в окрестности точки $(1{,}3)$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

21. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $x^3+2y^3+z^3-xyz=9$ определяет неявную функцию $z=\varphi(x,y)$ по крайней мере в окрестности точки $(2,1,1)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

22. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $x^2+y^2+z^2-xy=2$ определяет неявную функцию $z=\varphi(x,y)$ по крайней мере в окрестности точки $(-1{,}0,1)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

23. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $3x-2y+z=xz+5$ определяет неявную функцию $z=\varphi(x,y)$ по крайней мере в окрестности точки $(2,1,-1)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

24. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $e^z+x+2y+z=4$ определяет неявную функцию $z=\varphi(x,y)$ по крайней мере в окрестности точки $(1,1,0)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

25. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $x^2+y^2+z^2-z-4=0$ определяет неявную функцию $z=\varphi(x,y)$ по крайней мере в окрестности точки $(1,1,-1)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

26. Для функции $z=x^2+xy-2y^2$ найти наибольшее и наименьшее значения на множестве, определяемом неравенствами: $\begin{cases}-1\le x\le 1,\\ -1\le y\le 2.\end{cases}$

27. Для функции $z=2y^2-x^2+6y$ найти наибольшее и наименьшее значения на множестве, определяемом неравенствами: $x^2+\frac{y^2}{4}\le 1$.

28. Для функции $z=x^2+y^2-4y$ найти наибольшее и наименьшее значения на множестве, определяемом неравенствами: $x^2+1\le y\le 5$.

29. Для функции $z=y^3+3x^2y-15y$ найти наибольшее и наименьшее значения на множестве, определяемом неравенствами: $\begin{cases}0\le x\le 3,\\ -1\le y\le 3.\end{cases}$

30. Для функции $z=3x+6y-x^2-2y^2$ найти наибольшее и наименьшее значения на множестве, определяемом неравенствами: $\begin{cases}0\le x\le 2,\\ -1\le y\le 3.\end{cases}$

31. Вычислить интеграл $\iint_D\frac{x}{y}dxdy$, где область D ограничена линиями: $y=x^2, y^2=x, y=\frac{1}{4}$, причём $y\ge\frac{1}{4}$.

32. Вычислить интеграл $\iint_D(x^2+y^2)^5dxdy$, где область D - часть кольца между окружностями $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2=1$, расположенная во второй четверти.

33. Вычислить интеграл $\iint_D ydxdy$, где область D ограничена линиями: $x=0$, $x=3$, $y=x$, $y=x+2$.

34. Вычислить интеграл $\iint_D(1+x^2+y^2)dxdy$, где область D ограничена окружностью $x^2+y^2=1$ и осями координат, и расположена в первой четверти.

35. Вычислить интеграл $\iint_D(1-y)\,dxdy$, , где область D ограничена линиями: $x=0, x=2, y=0, y=e^x$.

36. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int_0^1dx\int_{-x}^{1-x^2}f(x,y)dy$

37. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int_0^3dx\int_{x-3}^{\sqrt{9-x^2}}f(x,y)dy$

38. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int_0^2dx\int_{x-2}^{4-x^2}f(x,y)dy$

39. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле: $\int_0^1dx\int_{-x}^{1-x^2}f(x,y)dy$.

40. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле: $\int_0^4 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{2x} f(x,y)dy$.

41. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $xy = 4$, $x = 8$, $y = 4$.

42. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 1, y = 9 - x^2$.

43. Вычислить $\int_\Gamma \frac{ds}{\sqrt{y-x}}$, где Г – часть прямой $y + x = 1$, заключенная между положительными направлениями осей координат.

44. Вычислить $\int_\Gamma (x - y)ds$, где Г – граница треугольника с вершинами $(2, 3)$, $(0, 4)$, $(-2, 2)$.

45. Вычислить $\int_\Gamma (x + y^2)ds$, где Г – правая полуокружность с центром в начале координат радиуса 3.

46. Вычислить $\int_\Gamma y \sin x\, dy - x \cos y\, dx$, если Г – отрезок прямой от точки $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ до точки $B(0, 0)$.

47. Вычислить $\int_\Gamma x^2ydx - yxdy$, если Г – левая полуокружность $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t \end{cases}$, обход которой совершается против часовой стрелке.

48. Показать, что $\int_{\overline{AB}} x(3y - x)dx + \frac{3}{2}x^2dy$ не зависит от пути интегрирования и вычислить его, полагая, что $A(-1, 1)$, $B(0, 2)$.

49. Показать, что интеграл $\int_{\overline{AB}}(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$ не зависит от пути интегрирования, и вычислить его, полагая, что $A(1, 0)$, $B(0, -1)$.

50. Показать, что интеграл $\int_{\overline{AB}}(3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy$ не зависит от пути интегрирования, и вычислить его, полагая, что $A(1, 2)$, $B(1, -4)$.

Оценочный лист к типовому заданию:

Компетенции	Индикатор	Образовательные результаты	Формальные признаки сформированности компетенции	Шкала оценивания
УК-1	УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи	Знает: этапы решения задачи из различных разделов математического анализа (теории пределов функций, дифференциального исчисления, интегрального исчисления функций одной и многих переменных, рядов).	Решение задачи включает краткое описание каждого этапа, который строго обоснован.	22 – 25 баллов
			В содержании некоторых этапов решения нарушена логическая последовательность, не каждый этап решения задачи обоснован.	18 – 21 баллов
			В содержании некоторых этапов решения нарушена логическая последовательность, большинство этапов решения задачи не обоснованы.	15 – 17 баллов
			Отсутствует обоснование этапов решения задачи	0 – 14 баллов
		Умеет: определять порядок действий при решении задачи исходя из её анализа	Проведён анализ задачи, в соответствии с которым верно определена последовательность шагов решения.	22 – 25 баллов
			Нарушена последовательность шагов решения задачи, не повлиявшая на конечный результат.	19 – 21 баллов
			Последовательность шагов решения	15 – 18 баллов

			задачи нарушена, вследствие чего допущены ошибки в решении.	
			Ответ не соответствует вышеуказанным критериям.	0 – 14 баллов
	УК-1.2. Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи	Умеет: работать с теоретическим материалом по теме задачи; пользоваться математической символикой и терминологией при решении задач и доказательстве теорем математического анализа	Даны верные формулировки требуемых теоретических положений (определений, правил, теорем), использование терминологического аппарата и математической символики осуществляется осознанно, интерпретируется с учетом специфики задач.	23 – 25 баллов
			Допущены ошибки в формулировках употребляемых утверждений, используемых при решении задач, впоследствии исправленные.	19 – 22 балла
			Допущены ошибки в формулировках употребляемых утверждений, используемых при решении задач или в употреблении математической символики.	15 – 18 баллов
			Ответ не соответствует вышеуказанным критериям.	0 – 14 баллов
	УК-1.3. Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и риски	Выбирает целесообразный метод решения задач математического анализа	Использование методов решения задач, доказательства и опровержения утверждений интерпретируется с учетом специфики задачи, выбранный метод решения задачи обоснован.	22 – 25 баллов
			Используемые при решении задач методы верны, но не учитывают специфику задачи.	18 – 21 баллов
			Используемые при решении задач методы не учитывают специфику задачи,	14 – 17 баллов

			допущены ошибки в процессе решения	
			Ответ не соответствует вышеуказанным критериям.	0 – 13 баллов

Методические материалы, определяющие процедуру и критерии оценивания сформированности компетенций при проведении промежуточной аттестации

В рамках дисциплины используется балльно-рейтинговая система оценивания индивидуальных результатов обучения. Возможные виды учебной работы студентов и критерии оценивания представлены в балльно-рейтинговой карте дисциплины.

Следует учитывать результаты обучения студента непосредственно в процессе освоения модуля дисциплины по следующим критериям: активное участие в ходе занятия; результаты подготовки домашнего задания; высокое качество выполнения поставленных задач; способность самостоятельно и в отведённый срок решать новые задачи.

Сформированность компетенции на уровне «знает», «умеет», «владеет» проверяется в форме письменного опроса, в процессе решения задач (индивидуальных и контрольных работ), подготовки доклада. При письменном опросе студент демонстрирует знания основных теоретических положений математического анализа, умение обосновывать сформулированные утверждения; в результате выполнения письменной работы студент объясняет решение задач, обосновывает выбор метода решения задачи.

Оценка сформированности компетенций осуществляется в процессе выполнения заданий по модулю в соответствии с разработанными критериями. Максимальный балл за выполненное задание ставится в случае, если задание решено правильно, даны обоснования, пояснения к каждому этапу решения задачи; студент знает все определения и свойства понятий, используемых при решении задачи.

Экзаменационный билет формируется из двух теоретических вопросов (если в одном семестре изучается несколько разделов дисциплины, то вопросы берутся из разных разделов) и одной задачи. Ответ на зачёте включает ответ на теоретический вопрос и решение задачи.

Оценочный лист по результатам промежуточной аттестации

Количество баллов	Критерии оценки
86 – 100 баллов:	Решение задачи включает краткое описание каждого этапа, который строго обоснован. Проведён анализ задачи, в соответствии с которым верно определена последовательность шагов решения. Даны верные формулировки требуемых теоретических положений (определений, правил, теорем), использование терминологического аппарата и математической символики осуществляется осознанно, интерпретируется с учетом специфики задач. Использование методов решения задач, доказательства и опровержения утверждений интерпретируется с учетом специфики задачи, выбранный метод решения задачи обоснован. Приведены чёткие и правильные формулировки определений и теорем, указанных в теоретических вопросах; приведена верная последовательность всех шагов требуемых доказательств или обоснований теоретических вопросов.
71 – 85 баллов	В содержании некоторых этапов решения нарушена логическая последовательность, не каждый этап решения задачи обоснован. Нарушена последовательность шагов решения задачи, не повлиявшая на конечный результат. Допущены ошибки в формулировках употребляемых утверждений, используемых при решении задач, впоследствии исправленные. Используемые при решении задач методы верны, но не учитывают специфику задачи. Приведены верные формулировки определений и теорем при ответе на теоретические вопросы.
56 – 70 баллов	В содержании некоторых этапов решения нарушена логическая последовательность, большинство этапов решения задачи не обоснованы. Последовательность шагов решения задачи нарушена, вследствие чего допущены ошибки в решении. Допущены ошибки в формулировках употребляемых утверждений, используемых при решении задач или в употреблении математической символики. Используемые при решении задач методы не учитывают специфику задачи, допущены ошибки в процессе решения. Приведены неполные формулировки определений и теорем при ответе на теоретические вопросы.
0 – 55 баллов	Ответ не соответствует вышеуказанным критериям.