

Пояснительная записка

Фонд оценочных средств (далее – ФОС) для промежуточной аттестации по дисциплине «Математический анализ» разработан в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки). Утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 22 февраля 2018 г. № 125 основной профессиональной образовательной программой высшего образования 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили «Математика» и «Физика» с учетом требований профессионального стандарта «Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)», утвержденный приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18 октября 2013 г. № 544н (зарегистрирован Министерством юстиции Российской Федерации 6 декабря 2013 г., регистрационный № 30550), с изменениями, внесенными приказами Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 25 декабря 2014 г. № 1115н (зарегистрирован Министерством юстиции Российской Федерации 19 февраля 2015 г., регистрационный № 36091) и от 5 августа 2016 г. № 422н (зарегистрирован Министерством юстиции Российской Федерации 23 августа 2016 г., регистрационный № 43326).

Цель ФОС для промежуточной аттестации – установление уровня сформированности части компетенции УК-1.

Задачи ФОС для промежуточной аттестации – контроль качества и уровня достижения результатов обучения по формируемым в соответствии с учебным планом компетенциям:

УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.

УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи

Знает: этапы решения задачи из различных разделов математического анализа (теории пределов функций, дифференциального исчисления, интегрального исчисления функций одной и многих переменных, рядов).

Умеет: определять порядок действий при решении задачи исходя из её анализа

УК-1.2. Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи.

Умеет: работать с теоретическим материалом по теме задачи; пользоваться математической символикой и терминологией при решении задач и доказательстве теорем математического анализа

УК-1.3. Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и риски.

Выбирает целесообразный метод решения задач математического анализа

Требование к процедуре оценки:

Помещение: особых требований нет

Оборудование: особые требования нет/ Инструменты: в рамках дисциплины используется балльно-рейтинговая система оценивания индивидуальных результатов обучения, согласно которой разработанные задания имеют критерии оценки в баллах.

Расходные материалы: особых требований нет

Доступ к дополнительным справочным материалам: особых требований нет

Нормы времени: на подготовку к ответу отводится 40 минут, на ответ –20 минут.

Комплект оценочных средств для проведения промежуточной аттестации

Проверяемая компетенция:

УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

Проверяемый индикатор достижения компетенции:

УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи

УК-1.2. Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи

УК-1.3. Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и риски.

Проверяемые результаты обучения:

Знает: этапы решения задачи из различных разделов математического анализа (теории пределов функций, дифференциального исчисления, интегрального исчисления функций одной и многих переменных, рядов).

Умеет: определять порядок действий при решении задачи исходя из её анализа.

Умеет: работать с теоретическим материалом по теме задачи; пользоваться математической символикой и терминологией при решении задач и доказательстве теорем математического анализа.

Выбирает целесообразный метод решения задач математического анализа

Тип (форма) задания: задачи.

Пример типовых заданий (оценочные материалы):

Модуль «Введение в анализ»

Задачи по теме «Пределы функций»:

Вычислить пределы функций, указывая используемые теоремы о пределах:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 5x^2 + 6x + 1);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 5x^2 + 4)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1};$$

- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - x}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} + 1}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 5^{-x}}{x}$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x-4} \right)^{3x}$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{3x} \right)^x$.
- 11) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 8)$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - x^2 + 1)$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$;
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^5 + x^3 + 2x^2}$;
- 15) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$;
- 16) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1}$;
- 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{2x}$;
- 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x \sin 5x}$;
- 19) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-5}{3x+5} \right)^{4x}$;
- 20) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^{2x-1}$.
- 21) $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 2x + 5)$;
- 22) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x + 1)$;
- 23) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$;
- 24) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 + 5x + 1}$;
- 25) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$;
- 26) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;
- 27) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{x \operatorname{tg} x}$;
- 28) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 3x)}{3x}$;
- 29) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{3x+1} \right)^{5x}$;
- 30) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-9}{x+7} \right)^{1-x}$.

Задачи по теме «Непрерывность функции. Точки разрыва».

Исследовать функции на непрерывность и построить график в окрестности каждой точки разрыва, предварительно определив её тип:

- 1) $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 2}$;
- 2) $y = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$;
- 3) $y = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$
- 4) $y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x-2}$.
- 5) $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{x-4}$;
- 6) $y = \frac{\sin x}{x}$;
- 7) $y = \frac{x}{(x-4)^2}$;
- 8) $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \leq -1; \\ x + 1, & x > -1. \end{cases}$
- 9) $y = \begin{cases} x + 1, & x < -2; \\ 1, & x = -2; \\ x^2 - 5, & x > -2. \end{cases}$
- 10) $y = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$;

- 11) $y = \frac{1}{5x^{-3}+2}$;
- 12) $y = \frac{x-1}{x^2-x-12}$;
- 13) $y = \operatorname{arctg} \frac{3+2x}{x-4}$;
- 14) $y = \frac{x^2+4}{x-2}$;
- 15) $y = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, x < 1; \\ 2x, x \geq 1. \end{cases}$
- 16) $y = \frac{(x+1)^2}{x^2-3x-4}$;
- 17) $y = \frac{1}{x^2-10x+16}$;
- 18) $y = \begin{cases} x^3, x \leq -1; \\ x^2 + 1, x > -1. \end{cases}$
- 19) $y = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$;
- 20) $y = \frac{-4}{(x-4)^2}$;
- 21) $y = \frac{x}{x^2+4}$;
- 22) $y = \begin{cases} \cos x, -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ x^2 + 1, x \geq 0. \end{cases}$
- 23) $y = 4x^{\frac{2}{x^2-1}}$;
- 24) $y = \frac{x-4}{x^2-16}$;
- 25) $y = \frac{x}{(x+1)^2}$;
- 26) $y = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}$;
- 27) $y = \begin{cases} e^x, x \leq 0, \\ 2x - 1, x > 0. \end{cases}$
- 28) $y = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x}}$;
- 29) $y = e^{x+\frac{1}{x}}$;
- 30) $y = \begin{cases} x^2 + 1, x < 0, \\ 1 - x, 0 \leq x \leq 2, \\ 2, x > 2. \end{cases}$

Модуль «Дифференциальное исчисление»

Задачи

Найти производные функций:

- 1) $y = 3x^4 - 5x + 1$;
- 2) $y = \cos^3 4x$;
- 3) $y = \frac{x-1}{x+1}$;
- 4) $y = 10^{2-x}$;
- 5) $y = 4 - \operatorname{arctg} x^2$;
- 6) $y = \frac{2}{\ln x}$;
- 7) $y = 3x^2(x^3 + e^x)$;
- 8) $y = \arccos(\sin x)$;
- 9) $y = \frac{x}{x^2+1}$;
- 10) $y = \frac{\cos x}{2-3 \sin x}$;
- 11) $y = \ln^2 x$;
- 12) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$;
- 13) $y = x \operatorname{arcsin} x$;
- 14) $y = \operatorname{ctg} \frac{x+1}{2}$;
- 15) $y = \sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x}$;
- 16) $\sin(2x + y) - 8xy = 0$;
- 17) $y = (1 + 2x)^{30}$;
- 18) $y = (\sin x)^{\cos x}$;
- 19) $y = 4x^3 + 3x^2 - 5$;
- 20) $y = \ln^2 5x$;
- 21) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$;
- 22) $y = \operatorname{tg} \frac{x-2}{3}$;
- 23) $y = 2 \cos 3x - 5 \sin x$;
- 24) $y = \frac{x}{\ln x}$;
- 25) $y = (3x^4 - 2x) \cdot e^x$;

- 26) $y = \arctg(\sin x)$;
 27) $y = \frac{x^2-4}{x^3+2x}$;
 28) $y = \frac{\sin x}{3 \cos x+x}$;
 29) $y = \cos^2 x$;
 30) $y = \frac{\arcsin x}{x^2}$;
 31) $x^2 y + \arctg \frac{y}{x} = 0$;
 32) $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$;
 33) $\cos(xy) + y^3 = 0$;
 34) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t^2 \end{cases}$.

Вычислить пределы функций, используя правила Лопиталья:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4+3x^3-2x^2+10x-12}{4x^4-5x^3-3x^2+7x-3}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-2x^2+2x-1}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3-8x^2+17x-10}{x^4-5x^3-2x^2+11x-5}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow \pm 2} \frac{x^4-5x^2+4}{x^4-3x^2-4}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{3x^2+x-1}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3}{e^x+x^2}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln x}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+\ln x}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-x}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

Индивидуальное задание. Провести полное исследование и построить графики заданных функций.

Вариант	Функции		
	A	B	C
1.	$y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 12$	$y = 1 - \frac{x}{(x-1)^2}$	$y = 2\arctg x - x$
2.	$y = \frac{1}{6}x^3(x^2 - 5)$	$y = 2 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$	$y = xe^{-\frac{x}{4}}$
3.	$y = x^3 - 4x^2 - 3x + 6$	$y = 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$	$y = \ln(x^2 - 4x)$
4.	$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$	$y = \frac{2x^2+2}{x+1}$	$y = x^3 e^{-\frac{4}{3}x}$
5.	$y = \frac{6x^2 - x^4}{9}$	$y = x^2 + \frac{4}{x}$	$y = 2x - \arctg 2x$
6.	$y = 4x^3 + 15x^2 + 12x + 1$	$y = \frac{x}{(x+2)^2}$	$y = x^3 e^{-x}$
7.	$y = x^4 - 2x^3 + 3$	$y = \frac{x^2-2}{3x^2-1}$	$y = \ln(x^2 + 2x)$
8.	$y = 3x^3 - x + 2$	$y = \frac{2x^2-1}{x^2-3}$	$y = xe^{-x}$
9.	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$	$y = \frac{x^2-3}{4x^2-1}$	$y = 2 - \arctg x^2$
10.	$y = \frac{(x-2)^2(x+4)}{4}$	$y = \frac{3-x^2}{x+2}$	$y = \ln(x^2 - 4)$
11.	$y = \frac{1}{9}x^5 - 45x + 1$	$y = \frac{4x+2}{(x-1)^2}$	$y = xe^{-\frac{x}{2}}$
12.	$y = 3x^5 - 5x^3$	$y = x + \frac{1}{x^2}$	$y = 1 + x - \arctg 2x$
13.	$y = (x+4)^2(x-5)$	$y = 2x - \frac{1}{x^2}$	$y = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$
14.	$y = x^2(x-3)$	$y = x + \frac{2x}{x^2-1}$	$y = \ln(x^2 + 4)$

15.	$y = \frac{(x^2 - 5)^3}{125}$	$y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$	$y = e^{2x} - 2x + 2$
16.	$y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$	$y = \frac{5x^2 - 2}{3x^2 - 1}$	$y = e^{2x-x^2}$
17.	$y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 2$	$y = \frac{6x^2 - 1}{x^2 - 9}$	$y = 4 - \arctg x^2$
18.	$y = x^4 - 8x^2 - 9$	$y = 2x - \frac{1}{x^2}$	$y = x^2 e^{\frac{x}{2}}$
19.	$y = -x^3 + 3x + 3$	$y = \frac{2x^2}{x+1}$	$y = \arctg x^2 + 5$
20.	$y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 40x$	$y = \frac{(4-x)^2}{2-x}$	$y = \ln(3x^2 + 6)$

Модуль «Интегральное исчисление»

Задачи по разделу «Неопределённый интеграл»

Найти интегралы:

1. $\int x \ln(x^2 + 2) dx;$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+x}};$

3. $\int x \cos 5x^2 dx;$

4. $\int \frac{(3x-5)dx}{\sqrt{9x^2 + 7x+1}};$

5. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^2};$

6. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x};$

7. $\int \frac{x^2 dx}{(3x^3+1)^2};$

8. $\int x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx;$

9. $\int x^4 \sqrt{4 - 3x^2} dx;$

10. $\int \sin^4 x dx;$

11. $\int \frac{\arcsin^3 3x dx}{\sqrt{1-9x^2}};$

12. $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^3};$

13. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{2x^2+8-x}} dx;$

14. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{3x-5} dx;$

15. $\int \frac{5x-2}{\sqrt{4x^2-4x+3}} dx;$

16. $\int (2x+1)e^{4x} dx;$

17. $\int \frac{dx}{5x + \sqrt[3]{x^2}};$

18. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx;$

19. $\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)};$

20. $\int \frac{dx}{2+3x^2};$

21. $\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2};$

22. $\int 3x \ln \frac{x}{2} dx;$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+x}};$

24. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}};$

25. $\int \cos^4 3x dx;$

26. $\int \frac{(3x-5)dx}{10+3x-x^2};$

27. $\int \frac{dx}{9x^2-4};$

28. $\int \frac{(1+2x)dx}{x^2(x^2+4)};$

29. $\int \cos^5 x \sin^2 x dx;$

30. $\int \arctg \sqrt{2x-1} dx.$

Задачи по разделу «Определённый и несобственные интегралы»

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x-2)^3$, $y = 4x - 8$. Сделать рисунок.

2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной кривыми $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$. Сделать рисунок.

3. Найти координаты центра тяжести линии $x^2 + y^2 = 4$ в первой четверти. Сделать рисунок.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 4 \cos \varphi$. Сделать рисунок.

5. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением линии $\begin{cases} x = 7(t - \sin t), \\ y = 7(1 - \cos t) \end{cases}$ вокруг оси абсцисс. Сделать рисунок.
6. Вычислить статический момент фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x, x = 4, y = 0$, относительно оси абсцисс. Сделать рисунок.
7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t; \end{cases} x = 1 (x \leq 1)$. Сделать рисунок.
8. Вычислить длину дуги первой арки $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$ Сделать рисунок.
9. Вычислить статический момент фигуры, ограниченной линиями $y = x + 2, y = x^2 - 6x + 8, x = 0, y = 0$, относительно оси абсцисс. Сделать рисунок.
10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$. Сделать рисунок.
11. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной кривыми $y = -x^2 + 5x - 6, y = 0$. Сделать рисунок.
12. Найти координаты центра тяжести линии $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases} t \in [0, 2\pi]$. Сделать рисунок.
13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x + 1)^2, y^2 = x + 1$. Сделать рисунок.
14. Вычислить длину дуги $\begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t; \end{cases} \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$. Сделать рисунок.
15. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2, y = x$. Сделать рисунок.
16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho^2 = 4 \cos 2\varphi$. Сделать рисунок.
17. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси ординат фигуры, ограниченной кривыми $y = \cos x, x = \frac{\pi}{2}, y = 1$. Сделать рисунок.
18. Вычислить статический момент линии $x^2 + y^2 = 9$ под осью абсцисс относительно оси абсцисс. Сделать рисунок.
19. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2 + 3, y = x^2 - 4x + 3$. Сделать рисунок.
20. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением линии $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$ вокруг полярной оси. Сделать рисунок.
21. Вычислить статический момент фигуры, ограниченной линиями $0 \leq y \leq \sqrt{16 - x^2}$ относительно оси абсцисс. Сделать рисунок.
22. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = (x - 1)^2, y^2 = x - 1$. Сделать рисунок.
23. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной кривыми $y = \cos 2x, -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. Сделать рисунок.
24. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями $y = 6 - x^2, y = 2$. Сделать рисунок.

25 – 30. Исследовать на сходимость интегралы:

25. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx;$

26. $\int_{-1}^0 \frac{e^x}{x^2} dx.$

27. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx;$

28. $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}.$

29. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}};$

30. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)}}.$

Модуль «Ряды»

Задачи

1. Исследовать ряд на сходимость:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{tg} \frac{2}{3n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} 6^n \cdot \sin \frac{\pi}{7n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 + 5}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$

8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^{5/2}}$$

9)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^4}$$

10)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

11)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^{n+1}}$$

12)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^n$$

13)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{3^n}$$

14)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

15)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

16)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 8n \cdot \sin \frac{1}{n}$$

17)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^5 n}$$

18)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n-1}$$

19)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2n}}$$

20)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{\pi}{5^n}$$

2. Определить вид сходимости ряда

1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n+3}}$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$$

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot (n+1)}$$

4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

5)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot (2n+1)}$$

6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n}{n^2+1}$$

7)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2+1}$$

8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$$

9)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n-1) \cdot (n+3)}$$

10)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n+3}}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}}$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot x^{2(n-1)}$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot 3^{n-1} \cdot x^{n-1}$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$
- 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}$
- 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right)^n x \right]^n$
- 9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1) \cdot (2n-1)!}$
- 10) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

4. Данную функцию $f(x)$ на заданном промежутке разложить в ряд Фурье. Построить графики $f(x)$ и суммы ряда $F(x)$. Вычислить значения $F(x)$ в указанных точках:

- 1) $f(x) = 2x - 1$, $[0, 2]$, $x = 0; \frac{\pi}{2}; 1; 2; 13,5; -6,4$.
- 2) $f(x) = 2x + 3$, $[0, \pi]$, по \cos , $x = 0; 1; \pi; 4,8; \frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}$.
- 3) $f(x) = 3x + 5$, $[0, 4]$, по \sin , $x = 0; \frac{1}{2}; 4; 19,2; -3,8$.
- 4) $f(x) = |x| + 1$, $[-\pi, \pi]$, $x = -\pi; 0; 1; \pi; 4,8; \frac{17\pi}{2}; -\frac{9\pi}{4}$.
- 5) $f(x) = 2 - 3x$, $[-2, 2]$, $x = -2; 0; 2; 21,3; -7,8$.
- 6) $f(x) = x + 3$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, по \cos , $x = 0; 1; \frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{4}; -\frac{5\pi}{8}$.
- 7) $f(x) = x^2$, $[0, 2]$, $x = -7,5; 0; 1,5; 2; 10,8$.
- 8) $f(x) = 2x$, $[0, \pi]$, по \cos , $x = -\frac{3\pi}{4}; 0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{27\pi}{4}$.
- 9) $f(x) = |x - 1|$, $[-2, 2]$, $x = -3,6; -2; 0; 2; 19,3$.
- 10) $f(x) = 5$, $[0, 2\pi]$, по \sin , $x = -6,3\pi; 0; 1; 2\pi; 7,2\pi$.
- 11) $f(x) = x - 2x^2$, $[0, 2]$, по \sin , $x = -7,7; 0; 15,2; 19,8$.
- 12) $f(x) = 3 - x$, $[0, \pi]$, $x = -5,7\pi; -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{4}; 13,2\pi$.
- 13) $f(x) = 2 - |x|$, $[-3, 3]$, $x = -4,6; -3; 0; 1,5; 3; 16,4$.
- 14) $f(x) = 4$, $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, по \sin , $x = -\frac{3}{8}\pi; 0; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}; \frac{17\pi}{8}$.
- 15) $f(x) = 2x + 1$, $[0, 4\pi]$, $x = -9,2\pi; 0; 1; 4\pi; 17,3\pi$.
- 16) $f(x) = |x - 2|$, $[0, 3]$, по \sin , $x = -7,3; 0; 1,6; 3; 9,3$.
- 17) $f(x) = 5$, $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, по \sin , $x = -\frac{5\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}$.
- 18) $f(x) = 1 - 2x^2$, $[-1, 1]$, $x = -12,2; -1; 0,6; 1; 7,4$.
- 19) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 3 - x, & 1 \leq x < 2, \end{cases}$ $x = -3,9; -2,1; 0; 1; 2; 13,3$.
- 20) $f(x) = 2x - 5$, $[0, 1]$, по \cos , $x = -2,8; 0; 0,7; 1; 14,2$.

Модуль «Функции многих переменных»

Задачи

1. Найти u_x, u_y , если $u = \ln(\eta\sqrt{\xi+1})$, где $\xi = y^2 - 2x$, $\eta = xy$.
2. Найти u_x, u_y , если $u = \arcsin \frac{2\xi}{\eta+3}$, где $\xi = y^3 + x$, $\eta = 2x + y$.
3. Найти u_x, u_y , если $u = \arctg(e^\xi + \ln \eta)$, где $\xi = xy$, $\eta = x - y$.
4. Найти u_x, u_y , если $u = 5^{\xi^2 + \eta}$, где $\xi = \ln(x + 1)$, $\eta = x + \sin y$.
5. Найти u_x, u_y , если $u = e^{\xi \eta}$, где $\xi = 2 \ln x - y$, $\eta = y^2 - x^2$.
6. Показать, что $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2$, если $u = x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$, где φ - произвольная дифференцируемая

функция.

7. Показать, что $\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{xy}$, если $z = x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x+1}\right)$, где φ - произвольная дифференцируемая функция.

8. Показать, что $\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{xy}$, если $z = \sqrt{xy} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, где φ - произвольная дифференцируемая функция.
9. Показать, что $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{y}{x} \cdot z = 0$, если $z = \frac{1}{x} \cdot \varphi(x^2 - y^2)$, где φ - произвольная дифференцируемая функция.
10. Показать, что $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = xy + u$, если $u = xy + x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, где φ - произвольная дифференцируемая функция.
11. Проверить: удовлетворяет ли уравнению $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ функция $u = \frac{y}{x}$?
12. Проверить: удовлетворяет ли уравнению $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3(x^3 - y^3)$ функция $u = \ln \frac{x}{y} + x^3 - y^3$?
13. Проверить: удовлетворяет ли уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ функция $u = \ln(x^2 + (y + 1)^2)$?
14. Проверить: удовлетворяет ли уравнению $y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ функция $u = x^{xy}$?
15. Проверить: удовлетворяет ли уравнению $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ функция $u = e^{xy}$?
16. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $2x^3y - 5y^2 + 6x = 6$ определяет неявную функцию $y = \varphi(x)$ по крайней мере в окрестности точки $(1,0)$. Найти $\frac{dy}{dx}$.
17. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $12xy^4 - 4x^2y = 8$ определяет неявную функцию $y = \varphi(x)$ по крайней мере в окрестности точки $(2,1)$. Найти $\frac{dy}{dx}$.
18. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $3y^2x - 2x^3y^4 + 2x = 3$ определяет неявную функцию $y = \varphi(x)$ по крайней мере в окрестности точки $(1,1)$. Найти $\frac{dy}{dx}$.
19. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $4x^2 + 3y^2 + xy = 6$ определяет неявную функцию $y = \varphi(x)$ по крайней мере в окрестности точки $(1, -1)$. Найти $\frac{dy}{dx}$.
20. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $x^3 + 6xy - y^3 = -8$ определяет неявную функцию $y = \varphi(x)$ по крайней мере в окрестности точки $(1,3)$. Найти $\frac{dy}{dx}$.
21. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $x^3 + 2y^3 + z^3 - xyz = 9$ определяет неявную функцию $z = \varphi(x, y)$ по крайней мере в окрестности точки $(2, 1, 1)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
22. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2$ определяет неявную функцию $z = \varphi(x, y)$ по крайней мере в окрестности точки $(-1, 0, 1)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
23. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $3x - 2y + z = xz + 5$ определяет неявную функцию $z = \varphi(x, y)$ по крайней мере в окрестности точки $(2, 1, -1)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
24. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $e^z + x + 2y + z = 4$ определяет неявную функцию $z = \varphi(x, y)$ по крайней мере в окрестности точки $(1, 1, 0)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
25. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0$ определяет неявную функцию $z = \varphi(x, y)$ по крайней мере в окрестности точки $(1, 1, -1)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
26. Для функции $z = x^2 + xy - 2y^2$ найти наибольшее и наименьшее значения на множестве, определяемом неравенствами: $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq y \leq 2. \end{cases}$
27. Для функции $z = 2y^2 - x^2 + 6y$ найти наибольшее и наименьшее значения на множестве, определяемом неравенствами: $x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$.
28. Для функции $z = x^2 + y^2 - 4y$ найти наибольшее и наименьшее значения на множестве, определяемом неравенствами: $x^2 + 1 \leq y \leq 5$.
29. Для функции $z = y^3 + 3x^2y - 15y$ найти наибольшее и наименьшее значения на множестве, определяемом неравенствами: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ -1 \leq y \leq 3. \end{cases}$
30. Для функции $z = 3x + 6y - x^2 - 2y^2$ найти наибольшее и наименьшее значения на множестве, определяемом неравенствами: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ -1 \leq y \leq 3. \end{cases}$
31. Вычислить интеграл $\iint_D \frac{x}{y} dx dy$, где область D ограничена линиями: $y = x^2, y^2 = x, y = \frac{1}{4}$, причём $y \geq \frac{1}{4}$.
32. Вычислить интеграл $\iint_D (x^2 + y^2)^5 dx dy$, где область D - часть кольца между окружностями $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 = 1$, расположенная во второй четверти.
33. Вычислить интеграл $\iint_D y dx dy$, где область D ограничена линиями: $x = 0, x = 3, y = x, y = x + 2$.
34. Вычислить интеграл $\iint_D (1 + x^2 + y^2) dx dy$, где область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 1$ и осями координат, и расположена в первой четверти.
35. Вычислить интеграл $\iint_D (1 - y) dx dy$, где область D ограничена линиями: $x = 0, x = 2, y = 0, y = e^x$.
36. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int_0^1 dx \int_{-x}^{1-x^2} f(x, y) dy$
37. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int_0^3 dx \int_{x-3}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy$
38. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int_0^2 dx \int_{x-2}^{4-x^2} f(x, y) dy$
39. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле: $\int_0^1 dx \int_{-x}^{1-x^2} f(x, y) dy$.

40. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле: $\int_0^4 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{2x} f(x, y) dy$.

41. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $xy = 4, x = 8, y = 4$.

42. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 1, y = 9 - x^2$.

43. Вычислить $\int_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{y-x}}$, где Γ – часть прямой $y + x = 1$, заключенная между положительными направлениями осей координат.

44. Вычислить $\int_{\Gamma} (x - y) ds$, где Γ – граница треугольника с вершинами $(2, 3), (0, 4), (-2, 2)$.

45. Вычислить $\int_{\Gamma} (x + y^2) ds$, где Γ – правая полуокружность с центром в начале координат радиуса 3.

46. Вычислить $\int_{\Gamma} y \sin x dy - x \cos y dx$, если Γ – отрезок прямой от точки $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ до точки $B(0, 0)$.

47. Вычислить $\int_{\Gamma} x^2 y dx - xy dy$, если Γ – левая полуокружность $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases}$ обход которой совершается против часовой стрелке.

48. Показать, что $\int_{AB} x(3y - x) dx + \frac{3}{2} x^2 dy$ не зависит от пути интегрирования и вычислить его, полагая, что $A(-1, 1), B(0, 2)$.

49. Показать, что интеграл $\int_{AB} (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$ не зависит от пути интегрирования, и вычислить его, полагая, что $A(1, 0), B(0, -1)$.

50. Показать, что интеграл $\int_{AB} (3x^2 - 2xy + y^2) dx + (2xy - x^2 - 3y^2) dy$ не зависит от пути интегрирования, и вычислить его, полагая, что $A(1, 2), B(1, -4)$.

Оценочный лист к типовому заданию:

Компетенции	Индикатор	Образовательные результаты	Формальные признаки сформированности компетенции	Шкала оценивания
УК-1	УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи	Знает: этапы решения задачи из различных разделов математического анализа (теории пределов функций, дифференциального исчисления, интегрального исчисления функций одной и многих переменных, рядов).	Решение задачи включает краткое описание каждого этапа, который строго обоснован.	22 – 25 баллов
			В содержании некоторых этапов решения нарушена логическая последовательность, не каждый этап решения задачи обоснован.	18 – 21 баллов
			В содержании некоторых этапов решения нарушена логическая последовательность, большинство этапов решения задачи не обоснованы.	15 – 17 баллов
			Отсутствует обоснование этапов решения задачи	0 – 14 баллов
		Умеет: определять порядок действий при решении задачи исходя из её анализа	Проведён анализ задачи, в соответствии с которым верно определена последовательность шагов решения.	22 – 25 баллов
			Нарушена последовательность шагов решения задачи, не повлиявшая на конечный результат.	19 – 21 баллов
	Последовательность шагов решения	15 – 18 баллов		

			задачи нарушена, вследствие чего допущены ошибки в решении.	
			Ответ не соответствует вышеуказанным критериям.	0 – 14 баллов
УК-1.2. Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи	Умеет: работать с теоретическим материалом по теме задачи; пользоваться математической символикой и терминологией при решении задач и доказательстве теорем математического анализа		Даны верные формулировки требуемых теоретических положений (определений, правил, теорем), использование терминологического аппарата и математической символики осуществляется осознанно, интерпретируется с учетом специфики задач.	23 – 25 баллов
			Допущены ошибки в формулировках употребляемых утверждений, используемых при решении задач, впоследствии исправленные.	19 – 22 балла
			Допущены ошибки в формулировках употребляемых утверждений, используемых при решении задач или в употреблении математической символики.	15 – 18 баллов
			Ответ не соответствует вышеуказанным критериям.	0 – 14 баллов
УК-1.3. Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и риски	Выбирает целесообразный метод решения задач математического анализа		Использование методов решения задач, доказательства и опровержения утверждений интерпретируется с учетом специфики задачи, выбранный метод решения задачи обоснован.	22 – 25 баллов
			Используемые при решении задач методы верны, но не учитывают специфику задачи.	18 – 21 баллов
			Используемые при решении задач методы не учитывают специфику задачи,	14 – 17 баллов

			допущены ошибки в процессе решения	
			Ответ соответствует вышеуказанным критериям.	не 0 – 13 баллов

Методические материалы, определяющие процедуру и критерии оценивания сформированности компетенций при проведении промежуточной аттестации

В рамках дисциплины используется балльно-рейтинговая система оценивания индивидуальных результатов обучения. Возможные виды учебной работы студентов и критерии оценивания представлены в балльно-рейтинговой карте дисциплины.

Следует учитывать результаты обучения студента непосредственно в процессе освоения модуля дисциплины по следующим критериям: активное участие в ходе занятия; результаты подготовки домашнего задания; высокое качество выполнения поставленных задач; способность самостоятельно и в отведённый срок решать новые задачи.

Сформированность компетенции на уровне «знает», «умеет», «владеет» проверяется в форме письменного опроса, в процессе решения задач (индивидуальных и контрольных работ), подготовки доклада. При письменном опросе студент демонстрирует знания основных теоретических положений математического анализа, умение обосновывать сформулированные утверждения; в результате выполнения письменной работы студент объясняет решение задач, обосновывает выбор метода решения задачи.

Оценка сформированности компетенций осуществляется в процессе выполнения заданий по модулю в соответствии с разработанными критериями. Максимальный балл за выполненное задание ставится в случае, если задание решено правильно, даны обоснования, пояснения к каждому этапу решения задачи; студент знает все определения и свойства понятий, используемых при решении задачи.

Экзаменационный билет формируется из двух теоретических вопросов (если в одном семестре изучается несколько разделов дисциплины, то вопросы берутся из разных разделов) и одной задачи. Ответ на зачёте включает ответ на теоретический вопрос и решение задачи.

Оценочный лист по результатам промежуточной аттестации

Количество баллов	Критерии оценки
86 – 100 баллов:	Решение задачи включает краткое описание каждого этапа, который строго обоснован. Проведён анализ задачи, в соответствии с которым верно определена последовательность шагов решения. Даны верные формулировки требуемых теоретических положений (определений, правил, теорем), использование терминологического аппарата и математической символики осуществляется осознанно, интерпретируется с учетом специфики задач. Использование методов решения задач, доказательства и опровержения утверждений интерпретируется с учетом специфики задачи, выбранный метод решения задачи обоснован. Приведены чёткие и правильные формулировки определений и теорем, указанных в теоретических вопросах; приведена верная последовательность всех шагов требуемых доказательств или обоснований теоретических вопросов.
71 – 85 баллов	В содержании некоторых этапов решения нарушена логическая последовательность, не каждый этап решения задачи обоснован. Нарушена последовательность шагов решения задачи, не повлиявшая на конечный результат. Допущены ошибки в формулировках употребляемых утверждений, используемых при решении задач, впоследствии исправленные. Используемые при решении задач методы верны, но не учитывают специфику задачи. Приведены верные формулировки определений и теорем при ответе на теоретические вопросы.
56 – 70 баллов	В содержании некоторых этапов решения нарушена логическая последовательность, большинство этапов решения задачи не обоснованы. Последовательность шагов решения задачи нарушена, вследствие чего допущены ошибки в решении. Допущены ошибки в формулировках употребляемых утверждений, используемых при решении задач или в употреблении математической символики. Используемые при решении задач методы не учитывают специфику задачи, допущены ошибки в процессе решения. Приведены неполные формулировки определений и теорем при ответе на теоретические вопросы.
0 – 55 баллов	Ответ не соответствует вышеуказанным критериям.