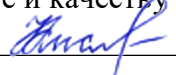


Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце: **МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
ФИО: Кислова Наталья Николаевна «Самарский государственный социально-педагогический университет»  
Должность: Проректор по УМР и качеству образования **Кафедра физики, математики и методики обучения**  
Дата подписания: 27.02.2024 13:23:12  
Уникальный программный ключ:  
52802513f5b14a975b3e9b13008093d5726b159bf6064f865ae65b96a966c035

Утверждаю  
Проректор по учебно-методической  
работе и качеству образования  
 Н.Н. Кислова


Кечина Ольга Михайловна

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
для проведения промежуточной аттестации по дисциплине  
«Математический анализ»

Направление подготовки:  
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)  
Направленность (профиль):  
«Математика» и «Физика»

Квалификация выпускника  
Бакалавр

Рассмотрено  
Протокол № 1 от 25.08.2020  
Заседания кафедры физики, математики и методики  
обучения

Одобрено  
Начальник Управления  
образовательных программ  
 Н.А. Доманина

## Пояснительная записка

Фонд оценочных средств (далее – ФОС) для промежуточной аттестации по дисциплине «Математический анализ» разработан в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки). Утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 22 февраля 2018 г. № 125 основной профессиональной образовательной программой высшего образования 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили «Математика» и «Физика» с учетом требований профессионального стандарта «Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)», утвержденный приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18 октября 2013 г. № 544н (зарегистрирован Министерством юстиции Российской Федерации 6 декабря 2013 г., регистрационный № 30550), с изменениями, внесенными приказами Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 25 декабря 2014 г. № 1115н (зарегистрирован Министерством юстиции Российской Федерации 19 февраля 2015 г., регистрационный № 36091) и от 5 августа 2016 г. № 422н (зарегистрирован Министерством юстиции Российской Федерации 23 августа 2016 г., регистрационный № 43326).

Цель ФОС для промежуточной аттестации – установление уровня сформированности части компетенции УК-1.

Задачи ФОС для промежуточной аттестации - контроль качества и уровня достижения результатов обучения по формируемым в соответствии с учебным планом компетенциям:

УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.

УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи

Знает: этапы решения задачи из различных разделов математического анализа (теории пределов функций, дифференциального исчисления, интегрального исчисления функций одной и многих переменных, рядов).

Умеет: определять порядок действий при решении задачи исходя из её анализа

УК-1.2. Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи.

Умеет: работать с теоретическим материалом по теме задачи; пользоваться математической символикой и терминологией при решении задач и доказательстве теорем математического анализа

УК-1.3. Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и риски.

Выбирает целесообразный метод решения задач математического анализа

Требование к процедуре оценки:

Помещение: особых требований нет

Оборудование: особых требований нет/ Инструменты: в рамках дисциплины используется балльно-рейтинговая система оценивания индивидуальных результатов обучения, согласно которой разработанные задания имеют критерии оценки в баллах.

Расходные материалы: особых требований нет

Доступ к дополнительным справочным материалам: особых требований нет

Нормы времени: на подготовку к ответу отводится 40 минут, на ответ –20 минут.

Проверяемая (ые) компетенция (и) (из ОПОП ВО):

УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач

Проверяемый индикатор достижения компетенции:

УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи

Проверяемые результаты обучения:

Знает: этапы решения задачи из различных разделов математического анализа (теории пределов функций, дифференциального исчисления, интегрального исчисления функций одной и многих переменных, рядов).

Умеет: определять порядок действий при решении задачи исходя из её анализа

Проверяемый индикатор достижения компетенции:

УК-1.2. Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи

Проверяемые результаты обучения:

Умеет: работать с теоретическим материалом по теме задачи; пользоваться математической символикой и терминологией при решении задач и доказательстве теорем математического анализа

Проверяемый индикатор достижения компетенции:

УК-1.3. Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и риски.

Проверяемый результат обучения:

Выбирает целесообразный метод решения задач математического анализа

Тип (форма) задания: задачи.

Пример типовых заданий (оценочные материалы):

Модуль «Введение в анализ»

Задачи по теме «Пределы функций»:

Вычислить пределы функций, указывая используемые теоремы о пределах:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 5x^2 + 6x + 1)$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 5x^2 + 4)$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+1}{x^2-1}$ ;
- 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{1-x}$ ;
- 5)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$ ;
- 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+1}$ ;
- 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}$ ;
- 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x-5^{-x}}{x}$ ;
- 9)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x-4}\right)^{3x}$ ;
- 10)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{3x}\right)^x$ .
- 11)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 8)$ ;
- 12)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - x^2 + 1)$ ;
- 13)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5}{x^2-3}$ ;
- 14)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$ ;
- 15)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1}$ ;
- 16)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x-1}$ ;
- 17)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{2x}$ ;
- 18)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x \sin 5x}$ ;
- 19)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-5}{3x+5}\right)^{4x}$ ;
- 20)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{2x-1}$ .
- 21)  $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 2x + 5)$ ;
- 22)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x + 1)$ ;
- 23)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ ;
- 24)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2+5x+1}$ ;
- 25)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$ ;
- 26)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ ;
- 27)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{x \cdot \operatorname{tg} x}$ ;
- 28)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 3x)}{3x}$ ;
- 29)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{3x+1}\right)^{5x}$ ;
- 30)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-9}{x+7}\right)^{1-x}$ .

Задачи по теме «Непрерывность функции. Точки разрыва».

Исследовать функции на непрерывность и построить график в окрестности каждой точки разрыва, предварительно определив её тип:

- 1)  $y = \frac{x^2-4x+3}{x^2-x-2}$ ;
- 2)  $y = \frac{x^2-16}{x-4}$ ;
- 3)  $y = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$
- 4)  $y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x-2}$ .
- 5)  $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{x-4}$ ;
- 6)  $y = \frac{\sin x}{x}$ ;

- 7)  $y = \frac{x-3}{(x-4)^2}$ ;
- 8)  $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \leq -1; \\ x+1, x > -1. \end{cases}$
- 9)  $y = \begin{cases} x+1, x < -2; \\ 1, x = -2; \\ x^2 - 5, x > -2. \end{cases}$
- 10)  $y = \frac{x^3-8}{x-2}$ ;
- 11)  $y = \frac{1}{5x^3+2}$ ;
- 12)  $y = \frac{x-1}{x^2-x-12}$ ;
- 13)  $y = \operatorname{arctg} \frac{3+2x}{x-4}$ ;
- 14)  $y = \frac{x^2+4}{x-2}$ ;
- 15)  $y = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, x < 1; \\ 2x, x \geq 1. \end{cases}$
- 16)  $y = \frac{(x+1)^2}{x^2-3x-4}$ ;
- 17)  $y = \frac{1}{x^2-10x+16}$ ;
- 18)  $y = \begin{cases} x^3, x \leq -1; \\ x^2 + 1, x > -1. \end{cases}$
- 19)  $y = \frac{1}{1+e^{x-1}}$ ;
- 20)  $y = \frac{-4}{(x-4)^2}$ ;
- 21)  $y = \frac{x}{x^2+4}$ ;
- 22)  $y = \begin{cases} \cos x, -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ x^2 + 1, x \geq 0. \end{cases}$
- 23)  $y = 4x^2-1$ ;
- 24)  $y = \frac{x-4}{x^2-16}$ ;
- 25)  $y = \frac{x}{(x+1)^2}$ ;
- 26)  $y = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}$ ;
- 27)  $y = \begin{cases} e^x, x \leq 0, \\ 2x - 1, x > 0. \end{cases}$
- 28)  $y = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x}}$ ;
- 29)  $y = e^{x+\frac{1}{x}}$ ;
- 30)  $y = \begin{cases} x^2 + 1, x < 0, \\ 1 - x, 0 \leq x \leq 2, \\ 2, x > 2. \end{cases}$

## Модуль «Дифференциальное исчисление»

## Задачи

Найти производные функций:

- 1)  $y = 3x^4 - 5x + 1$ ;
- 2)  $y = \cos^3 4x$ ;
- 3)  $y = \frac{x-1}{x+1}$ ;
- 4)  $y = 10^{2-x}$ ;
- 5)  $y = 4 - \operatorname{arctg} x^2$ ;
- 6)  $y = \frac{2}{\ln x}$ ;
- 7)  $y = 3x^2(x^3 + e^x)$ ;
- 8)  $y = \arccos(\sin x)$ ;
- 9)  $y = \frac{x}{x^2+1}$ ;
- 10)  $y = \frac{\cos x}{2-3 \sin x}$ ;
- 11)  $y = \ln^2 x$ ;
- 12)  $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ ;
- 13)  $y = x \operatorname{arcsin} x$ ;
- 14)  $y = \operatorname{ctg} \frac{x+1}{2}$ ;

- 15)  $y = \sqrt{1 + 2tgx}$ ;
- 16)  $\sin(2x + y) - 8xy = 0$ ;
- 17)  $y = (1 + 2x)^{30}$ ;
- 18)  $y = (\sin x)^{\cos x}$ .
- 19)  $y = 4x^3 + 3x^2 - 5$ ;
- 20)  $y = \ln^2 5x$ ;
- 21)  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ ;
- 22)  $y = tg \frac{x-2}{3}$ ;
- 23)  $y = 2 \cos 3x - 5 \sin x$ ;
- 24)  $y = \frac{x}{\ln x}$ ;
- 25)  $y = (3x^4 - 2x) \cdot e^x$ ;
- 26)  $y = \arctg(\sin x)$ ;
- 27)  $y = \frac{x^2-4}{x^3+2x}$ ;
- 28)  $y = \frac{3 \cos x + x}{\sin x}$ ;
- 29)  $y = \cos^2 x$ ;
- 30)  $y = \frac{\arcsin x}{x^2}$ ;
- 31)  $x^2 y + \arctg \frac{y}{x} = 0$ ;
- 32)  $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ ;
- 33)  $\cos(xy) + y^3 = 0$ ;
- 34)  $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t^2 \end{cases}$ .

Вычислить пределы функций, используя правила Лопиталя:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 10x - 12}{4x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 8x^2 + 17x - 10}{x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 11x - 5}$
- 4)  $\lim_{x \rightarrow \pm 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 3x^2 - 4}$
- 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$
- 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$
- 7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{3x^2 + x - 1}$
- 8)  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3}{e^x + x^2}$
- 9)  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{ctgx}{\ln x}$
- 10)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \ln x}$
- 11)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-x}$
- 12)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

Индивидуальное задание. Провести полное исследование и построить графики заданных функций.

Вариант	Функции		
	А	В	С
1.	$y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 12$	$y = 1 - \frac{x}{(x-1)^2}$	$y = 2\arctg x - x$
2.	$y = \frac{1}{6}x^3(x^2 - 5)$	$y = 2 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$	$y = xe^{-\frac{x}{4}}$
3.	$y = x^3 - 4x^2 - 3x + 6$	$y = 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$	$y = \ln(x^2 - 4x)$
4.	$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$	$y = \frac{2x^2 + 2}{x + 1}$	$y = x^3 e^{-\frac{4}{3}x}$
5.	$y = \frac{6x^2 - x^4}{9}$	$y = x^2 + \frac{4}{x}$	$y = 2x - \arctg 2x$
6.	$y = 4x^3 + 15x^2 + 12x + 1$	$y = \frac{x}{(x+2)^2}$	$y = x^3 e^{-x}$
7.	$y = x^4 - 2x^3 + 3$	$y = \frac{x^2 - 2}{3x^2 - 1}$	$y = \ln(x^2 + 2x)$

8.	$y = 3x^3 - x + 2$	$y = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 3}$	$y = xe^{-x}$
9.	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$	$y = \frac{x^2 - 3}{4x^2 - 1}$	$y = 2 - \arctg x^2$
10.	$y = \frac{(x-2)^2(x+4)}{4}$	$y = \frac{3-x^2}{x+2}$	$y = \ln(x^2 - 4)$
11.	$y = \frac{1}{9}x^5 - 45x + 1$	$y = \frac{4x+2}{(x-1)^2}$	$y = xe^{-\frac{x}{2}}$
12.	$y = 3x^5 - 5x^3$	$y = x + \frac{1}{x^2}$	$y = 1 + x - \arctg 2x$
13.	$y = (x+4)^2(x-5)$	$y = 2x - \frac{1}{x^2}$	$y = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$
14.	$y = x^2(x-3)$	$y = x + \frac{2x}{x^2 - 1}$	$y = \ln(x^2 + 4)$
15.	$y = \frac{(x^2 - 5)^3}{125}$	$y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$	$y = e^{2x} - 2x + 2$
16.	$y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$	$y = \frac{5x^2 - 2}{3x^2 - 1}$	$y = e^{2x-x^2}$
17.	$y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 2$	$y = \frac{6x^2 - 1}{x^2 - 9}$	$y = 4 - \arctg x^2$
18.	$y = x^4 - 8x^2 - 9$	$y = 2x - \frac{1}{x^2}$	$y = x^2 e^{\frac{x}{2}}$
19.	$y = -x^3 + 3x + 3$	$y = \frac{2x^2}{x+1}$	$y = \arctg x^2 + 5$
20.	$y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 40x$	$y = \frac{(4-x)^2}{2-x}$	$y = \ln(3x^2 + 6)$

## Модуль «Интегральное исчисление»

## Задачи по разделу «Неопределённый интеграл»

Найти интегралы:

- $\int x \ln(x^2 + 2) dx;$
- $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+x^7}};$
- $\int x \cos 5x^2 dx;$
- $\int \frac{(3x-5)dx}{\sqrt{9x^2 + 7x+1}};$
- $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^2};$
- $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x};$
- $\int \frac{x^2 dx}{(3x^3+1)^2};$
- $\int x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx;$
- $\int x^4 \sqrt{4 - 3x^2} dx;$
- $\int \sin^4 x dx;$
- $\int \frac{\arcsin^3 3x dx}{\sqrt{1-9x^2}};$
- $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^3};$
- $\int \frac{3x+1}{\sqrt{2x^2+8-x}} dx;$
- $\int \frac{\sqrt{x+1}}{3x-5} dx;$
- $\int \frac{5x-2}{\sqrt{4x^2-4x+3}} dx;$
- $\int (2x+1)e^{4x} dx;$
- $\int \frac{dx}{5x + \sqrt[3]{x^2}};$
- $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx;$
- $\int \frac{x dx}{(x^2+1)(x-1)};$
- $\int \frac{dx}{2+3x^2};$
- $\int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2};$
- $\int 3x \ln \frac{x}{2} dx;$

23.  $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+x^2}}$ ;
24.  $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$ ;
25.  $\int \cos^4 3x dx$ ;
26.  $\int \frac{(3x-5)dx}{10+3x-x^2}$ ;
27.  $\int \frac{dx}{9x^2-4}$ ;
28.  $\int \frac{(1+2x)dx}{x^2(x^2+4)}$ ;
29.  $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$ ;
30.  $\int \arctg \sqrt{2x-1} dx$ .

Задачи по разделу «Определённый и несобственные интегралы»

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = (x-2)^3$ ,  $y = 4x-8$ . Сделать рисунок.
2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной кривыми  $y = -x^2 + 5x - 6$ ,  $y = 0$ . Сделать рисунок.
3. Найти координаты центра тяжести линии  $x^2 + y^2 = 4$  в первой четверти. Сделать рисунок.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = 4 \cos \varphi$ . Сделать рисунок.
5. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением линии  $\begin{cases} x = 7(t - \sin t), \\ y = 7(1 - \cos t) \end{cases}$  вокруг оси абсцисс. Сделать рисунок.
6. Вычислить статический момент фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = 4x$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$ , относительно оси абсцисс. Сделать рисунок.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t; \end{cases} x = 1 (x \leq 1)$ . Сделать рисунок.

8. Вычислить длину дуги первой арки  $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$  Сделать рисунок.

9. Вычислить статический момент фигуры, ограниченной линиями  $y = x + 2$ ,  $y = x^2 - 6x + 8$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ , относительно оси абсцисс. Сделать рисунок.

10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$ . Сделать рисунок.

11. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной кривыми  $y = -x^2 + 5x - 6$ ,  $y = 0$ . Сделать рисунок.

12. Найти координаты центра тяжести линии  $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases} t \in [0, 2\pi]$ . Сделать рисунок.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = (x+1)^2$ ,  $y^2 = x+1$ . Сделать рисунок.

14. Вычислить длину дуги  $\begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t; \end{cases} \frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$ . Сделать рисунок.

15. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями  $y = 2 - x^2$ ,  $y = x$ . Сделать рисунок.

16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $\rho^2 = 4 \cos 2\varphi$ . Сделать рисунок.

17. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси ординат фигуры, ограниченной кривыми  $y = \cos x$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $y = 1$ . Сделать рисунок.

18. Вычислить статический момент линии  $x^2 + y^2 = 9$  под осью абсцисс относительно оси абсцисс. Сделать рисунок.

19. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2 + 3$ ,  $y = x^2 - 4x + 3$ . Сделать рисунок.

20. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением линии  $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$  вокруг полярной оси. Сделать рисунок.

21. Вычислить статический момент фигуры, ограниченной линиями  $0 \leq y \leq \sqrt{16 - x^2}$  относительно оси абсцисс. Сделать рисунок.

22. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = (x-1)^2$ ,  $y^2 = x-1$ . Сделать рисунок.

23. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной кривыми  $y = \cos 2x - \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ . Сделать рисунок.

24. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями  $y = 6 - x^2$ ,  $y = 2$ . Сделать рисунок.

25 – 30. Исследовать на сходимость интегралы:

25.  $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ ;

26.  $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ .

27.  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ ;

28.  $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$ .

29.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ;

30.  $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)}}$ .

Модуль «Ряды»

## Задачи

1. Исследовать ряд на сходимость:

1) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

2) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$$

3) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{tg} \frac{2}{3n}$$

4) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}$$

5) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} 6^n \cdot \sin \frac{\pi}{7^n}$$

6) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 + 5}$$

7) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$$

8) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^{5/2}}$$

9) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^4}$$

10) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

11) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^{n+1}}$$

12) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^n$$

13) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{3^n}$$

14) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

15) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

16) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} 8n \cdot \sin \frac{1}{n}$$

17) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^5 n}$$

18) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n-1}$$

19) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2n}}$$

20) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{\pi}{5^n}$$

2. Определить вид сходимости ряда

1) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n+3}}$$



2) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$$

3) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot (n+1)}$$

4) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

5) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot (2n+1)}$$

6) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n}{n^2+1}$$

7) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2+1}$$

8) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$$

9) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n-1) \cdot (n+3)}$$

10) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n+3}}$$

3. Найти область сходимости степенного ряда

1) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

2) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}}$$

3) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot x^{2(n-1)}$$

4) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot 3^{n-1} \cdot x^{n-1}$$

5) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

6) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$$

7) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}$$

8) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{n+1}{n} \right)^n x \right]^n$$

9) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1) \cdot (2n-1)!}$$

10) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$$

Модуль «Функции многих переменных»

Задачи

1. Найти  $u_x, u_y$ , если  $u = \ln(\eta\sqrt{\xi+1})$ , где  $\xi = y^2 - 2x$ ,  $\eta = xy$ .
2. Найти  $u_x, u_y$ , если  $u = \arcsin \frac{2\xi}{\eta+3}$ , где  $\xi = y^3 + x$ ,  $\eta = 2x + y$ .
3. Найти  $u_x, u_y$ , если  $u = \arctg(e^\xi + \ln \eta)$ , где  $\xi = xy$ ,  $\eta = x - y$ .
4. Найти  $u_x, u_y$ , если  $u = 5^{\xi^2+\eta}$ , где  $\xi = \ln(x+1)$ ,  $\eta = x + \sin y$ .
5. Найти  $u_x, u_y$ , если  $u = e^{\xi \cdot \eta}$ , где  $\xi = 2 \ln x - y$ ,  $\eta = y^2 - x^2$ .

6. Показать, что  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2$ , если  $u = x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ , где  $\varphi$  - произвольная дифференцируемая функция.
7. Показать, что  $\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{xy}$ , если  $z = x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x+1}\right)$ , где  $\varphi$  - произвольная дифференцируемая функция.
8. Показать, что  $\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{xy}$ , если  $z = \sqrt{xy} \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ , где  $\varphi$  - произвольная дифференцируемая функция.
9. Показать, что  $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{y}{x} \cdot z = 0$ , если  $z = \frac{1}{x} \cdot \varphi(x^2 - y^2)$ , где  $\varphi$  - произвольная дифференцируемая функция.
10. Показать, что  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = xu + u$ , если  $u = xy + x \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ , где  $\varphi$  - произвольная дифференцируемая функция.
11. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение  $2x^3y - 5y^2 + 6x = 6$  определяет неявную функцию  $y = \varphi(x)$  по крайней мере в окрестности точки  $(1,0)$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .
12. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение  $12xy^4 - 4x^2y = 8$  определяет неявную функцию  $y = \varphi(x)$  по крайней мере в окрестности точки  $(2,1)$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .
13. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение  $3y^2x - 2x^3y^4 + 2x = 3$  определяет неявную функцию  $y = \varphi(x)$  по крайней мере в окрестности точки  $(1,1)$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .
14. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение  $4x^2 + 3y^2 + xy = 6$  определяет неявную функцию  $y = \varphi(x)$  по крайней мере в окрестности точки  $(1, -1)$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .
15. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение  $x^3 + 6xy - y^3 = -8$  определяет неявную функцию  $y = \varphi(x)$  по крайней мере в окрестности точки  $(1,3)$ . Найти  $\frac{dy}{dx}$ .
16. Для функции  $z = x^2 + xy - 2y^2$  найти наибольшее и наименьшее значения на множестве, определяемом неравенствами:  $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq y \leq 2. \end{cases}$
17. Для функции  $z = 2y^2 - x^2 + 6y$  найти наибольшее и наименьшее значения на множестве, определяемом неравенствами:  $x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$ .
18. Для функции  $z = x^2 + y^2 - 4y$  найти наибольшее и наименьшее значения на множестве, определяемом неравенствами:  $x^2 + 1 \leq y \leq 5$ .
19. Для функции  $z = y^3 + 3x^2y - 15y$  найти наибольшее и наименьшее значения на множестве, определяемом неравенствами:  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 3, \\ -1 \leq y \leq 3. \end{cases}$
20. Для функции  $z = 3x + 6y - x^2 - 2y^2$  найти наибольшее и наименьшее значения на множестве, определяемом неравенствами:  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ -1 \leq y \leq 3. \end{cases}$
21. Вычислить интеграл  $\iint_D \frac{x}{y} dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями:  $y = x^2, y^2 = x, y = \frac{1}{4}$ , причём  $y \geq \frac{1}{4}$ .
22. Вычислить интеграл  $\iint_D (x^2 + y^2)^5 dx dy$ , где область  $D$  - часть кольца между окружностями  $x^2 + y^2 = 9$  и  $x^2 + y^2 = 1$ , расположенная во второй четверти.
23. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле  $\int_0^3 dy \int_{y-3}^{3-y} f(x, y) dx$ .
24. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле  $\int_0^1 dx \int_{-x}^{1-x^2} f(x, y) dy$ .
25. Вычислить  $\int_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{y-x}}$ , где  $\Gamma$  - часть прямой  $y + x = 1$ , заключенная между положительными направлениями осей координат.
26. Вычислить  $\int_{\Gamma} y \sin x dy - x \cos y dx$ , если  $\Gamma$  - отрезок прямой от точки  $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$  до точки  $B(0, 0)$ .
27. Вычислить интеграл  $\iint_D y dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями:  $x = 0, x = 3, y = x, y = x + 2$ .
28. Вычислить интеграл  $\iint_D (1 + x^2 + y^2) dx dy$ , где область  $D$  ограничена окружностью  $x^2 + y^2 = 1$  и осями координат, и расположена в первой четверти.
29. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле  $\int_0^3 dx \int_{x-3}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy$ .
30. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле  $\int_0^2 dx \int_{x-2}^{4-x^2} f(x, y) dy$ .
31. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:  $xy = 4, x = 8, y = 4$ .
32. Вычислить  $\int_{\Gamma} (x + y^2) ds$ , где  $\Gamma$  - правая полуокружность с центром в начале координат радиуса 3.
33. Показать, что  $\int_{AB} x(3y - x) dx + \frac{3}{2} x^2 dy$  не зависит от пути интегрирования и вычислить его, полагая, что  $A(-1, 1), B(0, 2)$ .
34. Вычислить интеграл  $\iint_D (1 - y) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями:  $x = 0, x = 2, y = 0, y = e^x$ .
35. Вычислить интеграл  $\iint_D y(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy$ , где область  $D: x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x$ .

36. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле:  $\int_0^1 dx \int_{-x}^{1-x^2} f(x, y) dy$ .

37. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле:  $\int_0^4 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{2x} f(x, y) dy$ .

38. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y = x^2 + 1, y = 9 - x^2$ .

39. Вычислить  $\int_{\Gamma} (x - y) ds$ , где  $\Gamma$  – граница треугольника с вершинами  $(2, 3), (0, 4), (-2, 2)$ .

40. Вычислить  $\int_{\Gamma} x^2 y dx - xy dy$ , если  $\Gamma$  – левая полуокружность  $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 4 \sin t; \end{cases}$  обход которой совершается

против часовой стрелке.

Оценочный лист к типовому заданию:

Компетенции	Индикатор	Образовательные результаты	Формальные признаки сформированности компетенции	Шкала оценивания
УК-1	УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи	Знает: этапы решения задачи из различных разделов математического анализа (теории пределов функций, дифференциального исчисления, интегрального исчисления функций одной и многих переменных, рядов).	Решение задачи включает краткое описание каждого этапа, который строго обоснован.	22 – 25 баллов
			В содержании некоторых этапов решения нарушена логическая последовательность, не каждый этап решения задачи обоснован.	18 – 21 баллов
			В содержании некоторых этапов решения нарушена логическая последовательность, большинство этапов решения задачи не обоснованы.	15 – 17 баллов
			Отсутствует обоснование этапов решения задачи	0 – 14 баллов
		Умеет: определять порядок действий при решении задачи исходя из её анализа	Проведён анализ задачи, в соответствии с которым верно определена последовательность шагов решения.	22 – 25 баллов
			Нарушена последовательность шагов решения задачи, не повлиявшая на конечный результат.	19 – 21 баллов
			Последовательность шагов решения задачи нарушена, вследствие чего допущены ошибки в решении.	15 – 18 баллов
			Ответ не соответствует вышеуказанным критериям.	0 – 14 баллов

УК-1.2. Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи	Умеет: работать с теоретическим материалом по теме задачи; пользоваться математической символикой и терминологией при решении задач и доказательстве теорем математического анализа	Даны верные формулировки требуемых теоретических положений (определений, правил, теорем), использование терминологического аппарата и математической символики осуществляется осознанно, интерпретируется с учетом специфики задач.	23 – 25 баллов
		Допущены ошибки в формулировках употребляемых утверждений, используемых при решении задач, впоследствии исправленные.	19 – 22 балла
		Допущены ошибки в формулировках употребляемых утверждений, используемых при решении задач или в употреблении математической символики.	15 – 18 баллов
		Ответ не соответствует вышеуказанным критериям.	0 – 14 баллов
УК-1.3. Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и риски	Выбирает целесообразный метод решения задач математического анализа	Использование методов решения задач, доказательства и опровержения утверждений интерпретируется с учетом специфики задачи, выбранный метод решения задачи обоснован.	22 – 25 баллов
		Используемые при решении задач методы верны, но не учитывают специфику задачи.	18 – 21 баллов
		Используемые при решении задач методы не учитывают специфику задачи, допущены ошибки в процессе решения	14 – 17 баллов
		Ответ не соответствует	0 – 13 баллов

			вышеуказанным критериям.	
--	--	--	--------------------------	--

Методические материалы, определяющие процедуру и критерии оценивания сформированности компетенций при проведении промежуточной аттестации

В рамках дисциплины используется балльно-рейтинговая система оценивания индивидуальных результатов обучения. Возможные виды учебной работы студентов и критерии оценивания представлены в балльно-рейтинговой карте дисциплины.

Следует учитывать результаты обучения студента непосредственно в процессе освоения модуля дисциплины по следующим критериям: активное участие в ходе занятия; результаты подготовки домашнего задания; высокое качество выполнения поставленных задач; способность самостоятельно и в отведённый срок решать новые задачи.

Сформированность компетенции на уровне «знает», «умеет», «владеет» проверяется в форме письменного опроса, в процессе решения задач (индивидуальных и контрольных работ), подготовки доклада. При письменном опросе студент демонстрирует знания основных теоретических положений математического анализа, умение обосновывать сформулированные утверждения; в результате выполнения письменной работы студент объясняет решение задач, обосновывает выбор метода решения задачи.

Оценка сформированности компетенций осуществляется в процессе выполнения заданий по модулю в соответствии с разработанными критериями. Максимальный балл за выполненное задание ставится в случае, если задание решено правильно, даны обоснования, пояснения к каждому этапу решения задачи; студент знает все определения и свойства понятий, используемых при решении задачи.

Экзаменационный билет формируется из двух теоретических вопросов (если в одном семестре изучается несколько разделов дисциплины, то вопросы берутся из разных разделов) и одной задачи. Ответ на зачёте включает ответ на теоретический вопрос и решение задачи.

#### Оценочный лист по результатам промежуточной аттестации

Количество баллов	Критерии оценки
86 – 100 баллов:	Решение задачи включает краткое описание каждого этапа, который строго обоснован. Проведён анализ задачи, в соответствии с которым верно определена последовательность шагов решения. Даны верные формулировки требуемых теоретических положений (определений, правил, теорем), использование терминологического аппарата и математической символики осуществляется осознанно, интерпретируется с учетом специфики задач. Использование методов решения задач, доказательства и опровержения утверждений интерпретируется с учетом специфики задачи, выбранный метод решения задачи обоснован. Приведены чёткие и правильные формулировки определений и теорем, указанных в теоретических вопросах; приведена верная последовательность всех шагов требуемых доказательств или обоснований теоретических вопросов.
71 – 85 баллов	В содержании некоторых этапов решения нарушена логическая последовательность, не каждый этап решения задачи обоснован. Нарушена последовательность шагов решения задачи, не повлиявшая на конечный результат. Допущены ошибки в формулировках употребляемых утверждений, используемых при решении задач, впоследствии исправленные. Используемые при решении задач методы верны, но не учитывают специфику задачи. Приведены верные формулировки определений и теорем при ответе на теоретические вопросы.
56 – 70 баллов	В содержании некоторых этапов решения нарушена логическая последовательность, большинство этапов решения задачи не обоснованы. Последовательность шагов решения задачи нарушена, вследствие чего допущены ошибки в решении. Допущены ошибки в формулировках употребляемых утверждений, используемых при решении задач или в употреблении математической символики. Используемые при решении задач методы не учитывают специфику задачи, допущены ошибки в процессе решения. Приведены неполные формулировки определений и теорем при ответе на теоретические вопросы.
0 – 55 баллов	Ответ не соответствует вышеуказанным критериям.